UNIVERSITE ABDELMALEK ESSAADI
Faculté des Sciences deTétouan
Département de Math & Info

20-11-2008

SMA I - ANALYSE I-CONTRÔLE I

Enoncé 1. Pour tout entier $n \geq 2$, on définit la fonction $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ par

$$f_n(x) = -1 + x + x^2 + \ldots + x^n$$

Partie I

(2)**a**. Si $x \in]0,1[$, calculer en fonction de x, les limites des suites

$$a_n = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n$$
$$b_n = -1 + x + x^2 + \ldots + x^n$$

(2)**b**. Montrer pour tout n, que la fonction f_n est strictement croissante; c'est-à-dire que $x < y \Rightarrow f_n(x) < f_n(y)$.

En déduire alors pour tout n, que si $f_n(x) < f_n(y)$, alors on a $x < y$.

Partie II

(2)**c**. On considère une suite u telle que $0 < u_n < 1$ et $f_n(u_n) = 0$. Montrer que $f_{n+1}(u_n) = u_n^{n+1}$.

(2)**d**. Montrer que $f_{n+1}(u_{n+1}) < f_{n+1}(u_n)$. En déduire que la suite u est strictement décroissante.

(2)**e**. Montrer que $f_n(\frac{1}{2}) < 0$ en calculant $f_n(\frac{1}{2})$ en fonction de n. En déduire que la suite u est minorée par $\frac{1}{2}$.

(3)**f**. Montrer que la suite u est convergente. On pose $l = \lim u$. Montrer que $\frac{1}{2} \leq l \leq u_n$ pour tout n. En déduire que $\lim f_n(l) = 0$.

(2)**g**. Calculer $\lim f_n(l)$ en fonction de l. En déduire la valeur de l.

Enoncé 2. On considère la suite

$$u_n = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{n^2}$$

(2)**a**. Montrer que la suite $v_n = u_n + \frac{1}{n}$ est monotone.

(3)**b**. Montrer que la suite u est convergente.




ETUSUP.com